GINO FANO'S PIONEERING ROLE: A CASE-STUDY FROM THE HISTORY OF MATHEMATICS

Elena Scalambro

Department of Mathematics 'G. Peano' – Università degli Studi di Torino

Tutor: prof. Erika Luciano

International Day of Women and Girls in Science

11 February 2021

GINO FANO (1871-1952) AND THE ITALIAN SCHOOL

The issue of birational classification of varieties: natural extension in higher dimension of curves and surfaces results (**Lüroth's problem**).

Pioneer in algebraic geometry and ***'one of the most outstanding exponents of the glorious Italian school of geometry.'***
[B. Segre 1952, p. 262]

- 1888-92: studies in Turin (C. Segre, G. Castelnuovo)
  1890: translation of F. Klein's *Erlangen Program*
- 1893-94: period of deeper studies in Göttingen
- 1894-1900: assistantship and universitary teaching in Rome and Messina
- 1901-38: 'Turinese' period
- 1938-45: forced exile in Lausanne
- 1946-52: Fano resides alternatively in the USA and in Italy

Studies on Fano-Enriques threefolds

THE MEMOIR OF 1938

Fano’s contribution to the study and the classification of the so-called **Fano-Enriques threefolds** is truly original and innovative.

Fano threefold $V \subset \mathbb{P}^n$ with 8 fixed points $\xrightarrow{\text{Quotient}}$ Fano threefold of ‘special’ type $\xrightarrow{\text{Birational projective model}}$ Fano threefold $V' \subset \mathbb{P}^n$ whose hyperplane sections are **Enriques surfaces**

- ❑ The general V' is birational to a Fano variety
- ❑ Incomplete classification of Fano-Enriques threefolds

The starting point is the following result of L. **Godeaux**

> Every three-dimensional normal algebraic variety, non-cone, whose hyperplane sections are regular surfaces of genus zero and bigenus one with bicanonic curve of order zero ($p_a = p_g = 0, P_6 = 1$) contains a linear system of surfaces of genera one ($p_a = p_g = P_2 = 1$), whose dimension increased by one unit equals the dimension of the ambient space.
>
> [Godeaux 1933, p. 134, in Fano 1938, p. 41]

THE FUNDAMENTAL CONSTRUCTION

"The system $|\phi|$ will represent […] a ***variety M_3^{2p-6} in S_{p-1} referable to a variety W_3^{2p-2}****, with surface-sections of genera one, which are images of ϕ, and canonical curve-sections of genus $p-2$.*

[Fano 1938, p. 42]

Existence of a **birational map** that makes the following diagram of mappings commutative.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \widetilde{W} \arrow[dl, "\sigma"'] \arrow[dr, "\tilde{\lambda} = \lambda_{|\widetilde{D}|}"] & \\
W_3^{2p-2} \subset \mathbb{P}^p \arrow[rr, dashed, "\lambda = \lambda_{|D|}"'] & & M_3^{2p-6} \subset \mathbb{P}^{p-1}
\end{tikzcd}$$

$P_i, i = 1, \dots, 8,$
isolated singulaties
(quadruple points)

$\longleftrightarrow$

8 planes

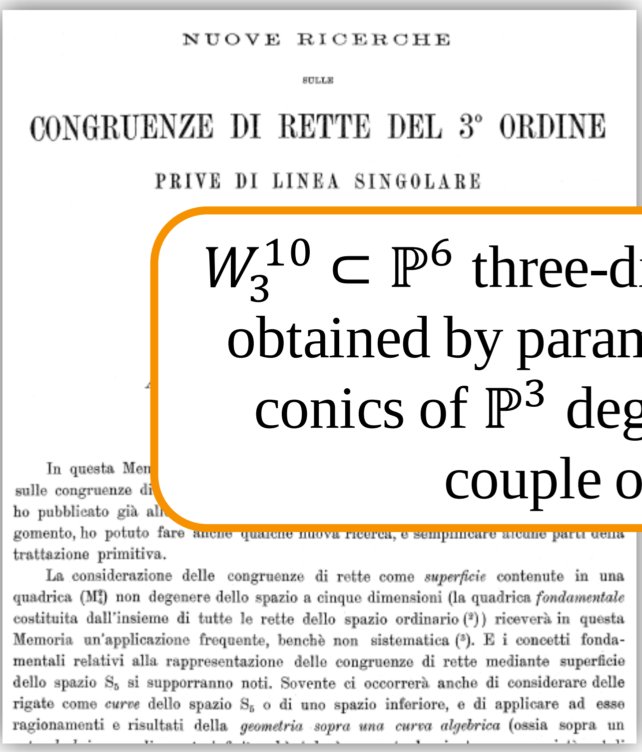
Fano's assumption: possible pairs of incident planes intersect in different points

'Modern' hypotesis

- W_3^{2p-2} projectively normal and not a cone
- $W_3^{2p-2} \cdot H = F$, with F Enriques surface and H general hyperplane
- p genus of the curve-section
- 'similar' singular points P_i
- smooth $\widetilde{W}$, blow up of W_3^{2p-2} in the singular points P_i
- smooth exceptional divisors E_i
- irreducible curve $\widetilde{D} \cdot E_i = C_i$ for a general divisor D
- system of proper transformations $|\widetilde{D}|$ without base-points

[Conte-Murre 1985, p. 43-80]

FANO-ENRIQUES THREEFOLD $W_3^{10} \subset \mathbb{P}^6$ & $W_3^{12} \subset \mathbb{P}^7$



NUOVE RICERCHE

SULLE

CONGRUENZE DI RETTE DEL 3° ORDINE

PRIVE DI LINEA SINGOLARE

In questa Mem

sulle congruenze di

ho pubblicato già all

gomento, ho potuto fare

trattazione primitiva.

La considerazione delle congruenze di rette come *superficie* contenute in una quadrica (M_4^2) non degenere dello spazio a cinque dimensioni (la quadrica *fondamentale* costituita dall'insieme di tutte le rette dello spazio ordinario (²)) riceverà in questa Memoria un'applicazione frequente, benchè non sistematica (³). E i concetti fondamentali relativi alla rappresentazione delle congruenze di rette mediante superficie dello spazio S_5 si supporranno noti. Sovente ci occorrerà anche di considerare delle rigate come *curve* dello spazio S_5 o di uno spazio inferiore, e di applicare ad esse ragionamenti e risultati della *geometria sopra una curva algebrica* (ossia sopra un

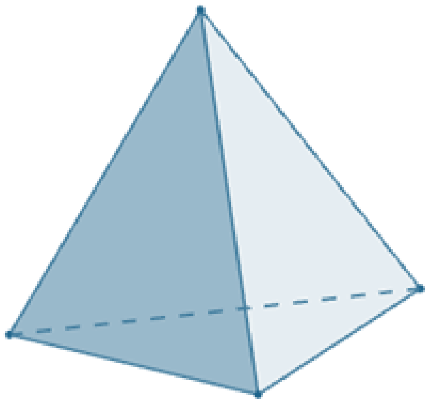
$W_3^{10} \subset \mathbb{P}^6$ three-dimensional variety obtained by parametrising the dual conics of $\mathbb{P}^3$ degenerating into a couple of points

$M_3^6 \subset \mathbb{P}^5$ is the intersection of a quadric Q and a cubic hypersurface C of $\mathbb{P}^5$ which contains 8 planes intersecting two-by-two

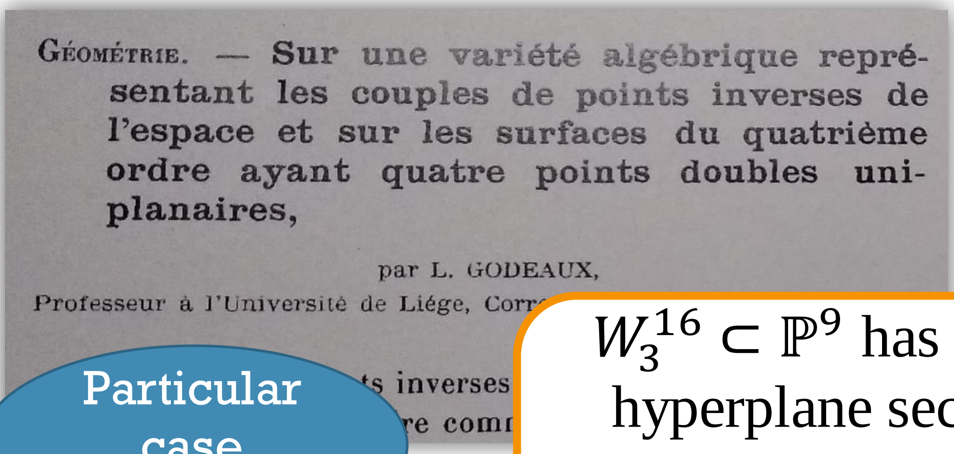
Its hyperplane sections are Enriques surfaces of special type: the so-called **Reye congruences.**

$W_3^{12} \subset \mathbb{P}^7$ is the image of $\mathbb{P}^3$ by the linear system of all sextic surfaces containing one fixed plane cubic δ and going doubly through the edges of a tetrahedron

$M_3^8 \subset \mathbb{P}^6$ is the intersection of 3 quadrics, having 8 planes in common



FANO-ENRIQUES THREEFOLD $W_3^{16} \subset \mathbb{P}^9$ & $W_3^{24} \subset \mathbb{P}^{13}$


GÉOMÉTRIE. — Sur une variété algébrique représentant les couples de points inverses de l'espace et sur les surfaces du quatrième ordre ayant quatre points doubles uniplanaires,

par L. GODEAUX,

Professeur à l'Université de Liége, Corr

Particular case

$V_3^{16} \subset \mathbb{P}^9$

Intersection of the Segre embedding of $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ with a quadric containing four planes.

$W_3^{16} \subset \mathbb{P}^9$ has Enriques surfaces as hyperplane sections which can be obtained as quotients modulo an involution from the intersection of 3 quadrics of $\mathbb{P}^5$

$M_3^{12} \subset \mathbb{P}^8$ is the intersection of a quadric Q with "*the variety V_4^6 «of C. Segre», representing unordered pairs of points of two planes*"

$W_3^{24} \subset \mathbb{P}^{13}$ is the image of $\mathbb{P}^3$ by the linear system of surfaces of the 6th order going doubly through the edges of a tetrahedron

$M_3^{20} \subset \mathbb{P}^{12}$ is the image of $\mathbb{P}^3$ by the system of the surfaces of the 4th order passing simply through the edges of the same tetrahedron

EXCLUSION OF THE OTHER CASES IF $p \geq 5$

"Except for the cases already considered, there ***do not exist*** *other* $\boldsymbol{M_3^{2p-6}}$ ***of*** $\boldsymbol{S_{p-1}}$*, containing* ***8 planes****, or* $\boldsymbol{W_3^{2p-2}}$ ***of*** $\boldsymbol{S_p}$ *respectively, with* ***8 quadruple points****, as requested."* [Fano 1938, p. 59]

p	Fano	Modern algebraic geometry
5	Projective type argument	Smooth Enriques surface of degree d in $\mathbb{P}^4$, d must satisfy the equation $d^2 - 10d + 12 = 0$ [**Hartshone** 1977, p. 434] $\Longrightarrow$ Since it has no integer solution, $p > 5$
8	Analysis of the intersecting relationships between the 8 planes of M_3^{2p-6}	$W_3^{14} \subset \mathbb{P}^8$ [**Bayle** 1994]; its hyperplane sections are sextic hypersurfaces of $\mathbb{P}^3$ going doubly through the edges of a tetrahedron and containing a fixed conic
10	Analysis of the intersecting relationships between the 8 planes of M_3^{2p-6}	$W_3^{18} \subset \mathbb{P}^{10}$ [**Beauville** 1984]; its hyperplane sections are generalized Reye congruences of degree 18 in $\mathbb{P}^9$
11 and 12	Analysis of the projection of W_3^{2p-2} from 4 singular points	? They do not fit into Bayle and Sano's classification

FANO-ENRIQUES THREEFOLD $W_3^6 \subset \mathbb{P}^4$

$W_3^6 \subset \mathbb{P}^4$ is a classic Enriques threefold; its surface-sections $F^6 \subset \mathbb{P}^3$ of genus zero and bigenus one go doubly through the edges of a tetrahedron

$M_3^2 \subset \mathbb{P}^3$ is the double projective space $\mathbb{P}^3$

Si le centre de projection est le point $O_0\ (1, 0, 0, 0, 0)$, la variété V_3^6 a pour équation

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_2(x_2x_3x_4,\ x_3x_4x_1,\ x_4x_1x_2,\ x_1x_2x_3) \\ \qquad + x_1x_2x_3x_4[x_0^2 + x_0 f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) + f_2(x_1, x_2, x_3, x_4)] = 0, \end{array}\right\} \quad (1)$$

où φ_2, f_1, f_2 désignent des polynômes à quatre variables homogènes dont le degré est indiqué par l'indice. Les six plans doubles sont représentés par deux des équations

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0.$$

Les hypersurfaces cubiques passant par ces six plans doubles sont des cônes de sommet O_0. L'intersection de ces cônes

$$\lambda_0 x_2x_3x_4 + \lambda_1 x_3x_4x_1 + \lambda_2 x_4x_1x_2 + \lambda_3 x_1x_2x_3 = 0 \qquad (2)$$

avec V_3^6 se compose des six plans doubles et de ∞^3 surfaces Φ, d'ordre six.

[Godeaux 1933, p. 137]

— 63 —

damentale [o] del sistema di coordinate, e i 4 spazi S_3 anzidetti come spazi $x_i = 0\ (i = 1, 2, 3, 4)$, l'equazione di W_3^6 sarà del tipo (1):

$$x_1 x_2 x_3 x_4 \{ x_0^2 + 2x_0 f_1 (x_1 x_2 x_3 x_4) + f_2 (x_1 x_2 x_3 x_4) \}$$
$$+ \varphi_2 (x_2 x_3 x_4,\ x_1 x_3 x_4, x_1 x_2 x_4, x_1 x_2 x_3) = 0$$

dove f_1, f_2 sono forme di gradi rispettivamente 1 e 2 nelle $x_1, \cdots x_4$, e φ_2 è forma quadratica nelle espressioni $x_2 x_3 x_4, \cdots$, la quale può supporsi contenente i soli termini coi quadrati di queste 4 espressioni, comprendendo i termini rimanenti nel prodotto $x_1 x_2 x_3 x_4 f_2$. Il punto [o] è 4^{plo} per W_3^6; le rette uscenti da esso segano su W_3^6 le coppie di una involuzione $\mathbf{I}_2$; e da esso W_3^6 si proietta in un S_3 doppio (p. es. $x_0 = 0$) con superficie di diramazione:

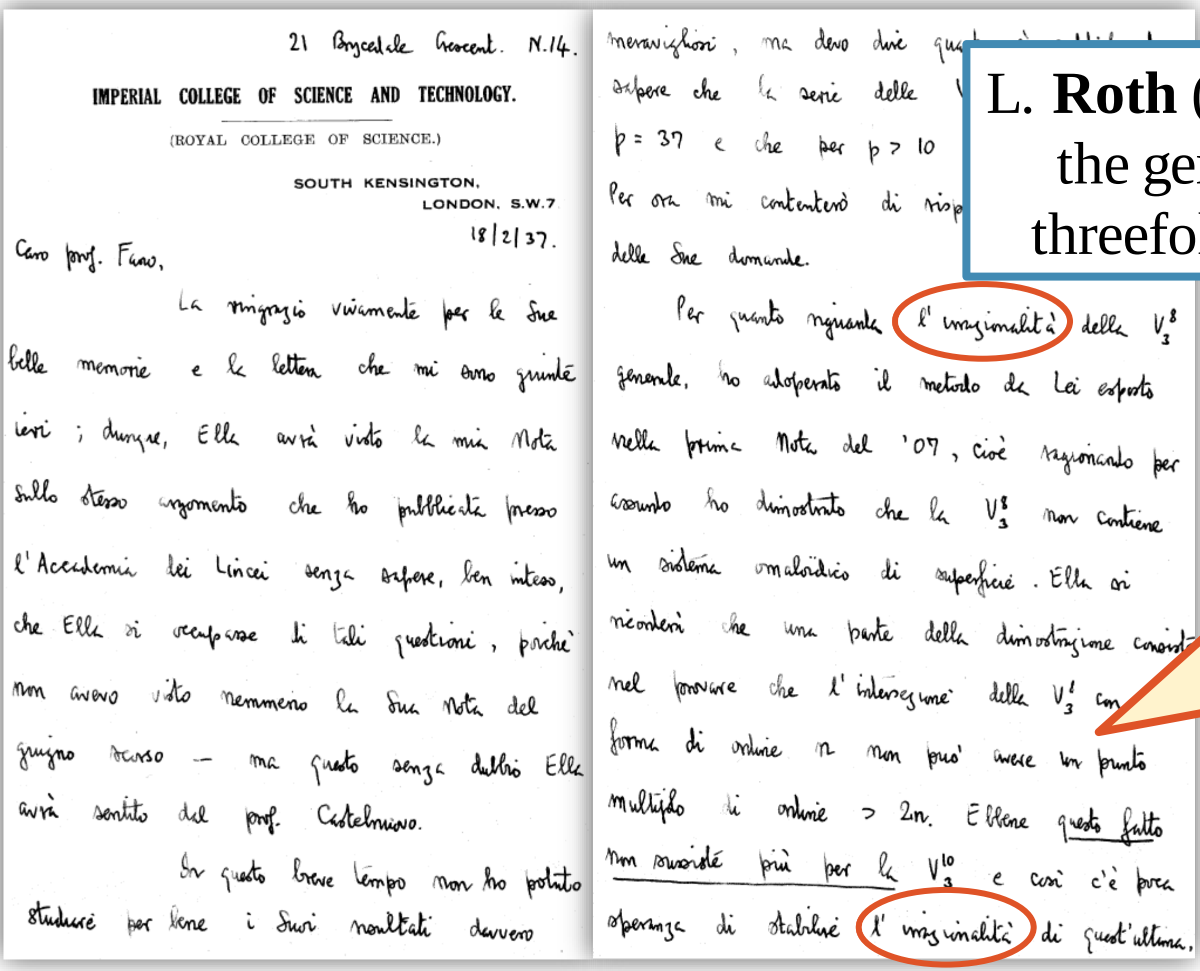
$$x_1 x_2 x_3 x_4 \{ x_1 x_2 x_3 x_4 (f_1^2 - f_2) - \varphi_2 \} = 0$$

di ordine 10, composta dei 4 piani tracce degli spazi $x_1 = 0, \cdots x_4 = 0$ e proiezioni dell'intorno di [o] su W_3^6, e di una F^6 proiezione dell'intersezione di W_3^6 collo spazio $x_0 + f_1 = 0$.

[Fano 1938, p. 63]

FANO-ENRIQUES THREEFOLD $W_3^6 \subset \mathbb{P}^4$

Fano then claims that the variety $W_3^6 \subset \mathbb{P}^4$ is not **unirational** and not even **rational**.



21 Bycullah Crescent. N.14.

IMPERIAL COLLEGE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY.

(ROYAL COLLEGE OF SCIENCE.)

SOUTH KENSINGTON,
LONDON, S.W.7

18/2/37.

Caro prof. Fano,

La ringrazio vivamente per le Sue belle memorie e le lettera che mi sono giunte ieri; dunque, Ella avrà visto la mia Nota sullo stesso argomento che ho pubblicata presso l'Accademia dei Lincei senza sapere, ben inteso, che Ella si occupava di tali questioni, poichè non avevo visto nemmeno la Sua Nota del giugno scorso — ma questo senza dubbio Ella avrà sentito dal prof. Castelnuovo.

In questo breve tempo non ho potuto studiare per bene i Suoi risultati davvero meravigliosi, ma devo dire qu

sapere che la serie delle

$p = 37$ e che per $p > 10$

Per ora mi contenterò di risp

delle Sue domande.

Per quanto riguarda l'unirazionalità della V_3^8 generale, ho adoperato il metodo da Lei esposto nella prima Nota del '07, cioè ragionando per assurdo ho dimostrato che la V_3^8 non contiene un sistema omaloidico di superficie. Ella si ricorderà che una parte della dimostrazione consiste nel provare che l'intersezione della V_3^8 con forma di ordine n non può avere un punto multiplo di ordine > 2n. Ebbene questo fatto non sussiste più per la V_3^{10} e così c'è poca speranza di stabilire l'unirazionalità di quest'ultima.

L. **Roth** (1955) shows that the general Enriques threefold is unirational

L. **Picco-Botta** and A. **Verra** (1983) provide the final proof of its irrationality

*As regards the **unirationality** of the general V_3^8, I used the method You outlined in the first 1907 Note […]. Well, this fact does no longer subsist for the V_3^{10} and, thus, there is also hope for determining the **unirationality** of this latter.*

L. Roth to G. Fano, London, 18.2.1937 [**Fano Archive**, lett. 23, SML, Turin]

THE MAIN THEOREM

- **Rationality** of Fano-Enriques threefolds with $p \geq 6$
- **Correspondence** between the three-dimensional varieties W_3^{2p-2} and M_3^{2p-6}
- **Complete** classification of these threefolds

[Fano 1938, p. 66]

12. I risultati ottenuti nella presente Memoria possono così riassumersi:

Le varietà algebriche a 3 dimensioni W_3^{2p-2} di spazi S_p, non coni, con superficie sezioni di caratteri $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$ (genere zero, bigenere uno, curva bicanonica di ordine zero) *esistono solo quando il genere p delle curve sezioni ha uno dei valori $p = 4, 6, 7, 9, 13$.*

Per $p = 4$, la W_3^6 di S_4 ha un punto quadruplo e sei piani doppi passanti per questo punto, mutue intersezioni di quattro spazi S_3; non è razionale, e nemmeno unirazionale.

Le ulteriori W_3^{2p-2} di S_p suindicate ($p = 6, 7, 9, 13$) sono tutte razionali; hanno otto punti quadrupli isolati, e sono riferibili (valendosi del sistema lineare ∞^{p-1} di superficie di generi uno già costruito da L. Godeaux) *a varietà M_3^{2p-6} di S_{p-1} a curve sezioni canoniche, contenenti otto piani, immagini dei punti 4^{pli} di W_3^{2p-2}.*

Inoltre: *I sistemi lineari semplici di superficie dello spazio S_3 aventi genere zero e bigenere uno e curva bicanonica di ordine zero possono ridursi con una trasformazione Cremoniana a uno dei tre sistemi qui sotto indicati, o a uno contenuto in essi:*

1. *sistema ∞^6 delle superficie di 7° ordine con 3 cubiche sghembe doppie, tutte passanti per uno stesso gruppo di 5 punti*, perciò giacenti, a coppie, su quadriche (n. 3);

2. *sistema ∞^9 delle superficie di 7° ordine passanti doppiamente per i 9 spigoli di due triedri* (n. 8);

3. *sistema ∞^{13} delle superficie di 6° ordine passanti doppiamente per i 6 spigoli di un tetraedro* (n. 4, 9).

Le M_3^{2p-6} di S_{p-1}, con 8 piani cui sono riferibili le W_3^{2p-2} anzidette sono tutte rappresentate su S_3 da sistemi lineari di superficie del 4° ordine.

Torino, gennaio 1937-XV.

THE MAIN THEOREM

12. I risultati ottenuti nella presente Memoria possono così riassumersi: *Le varietà algebriche a 3 dimensioni* W_3^{2p-2} *di spazi* S_p, *non coni, con superficie sezioni di caratteri* $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$ (genere zero, bigenere uno, curva bicanonica di ordine zero) *esistono solo quando il genere* p *delle curve sezioni ha uno dei valori* $p = 4, 6, 7, 9, 13$.

Per $p = 4$, la W_3^6 di S_4 ha un punto quadruplo e sei piani doppi passanti per questo punto, mutue intersezioni di quattro spazi S_3; non è razionale, e

tutte rappresentate su S_3 da sistemi lineari di superficie del 4° ordine.

Torino, gennaio 1937-XV.

[Fano 1938, p. 66]

*In general case, **this problem seems very hard to solve** because their singularities may not be $\mathbb{Q}$-Gorenstein.* [Sano 1995]

[…] *when the surface section is an Enriques surface **a complete classification has not been archive yet**.* [Giraldo, Lopez & Muñoz 2004]

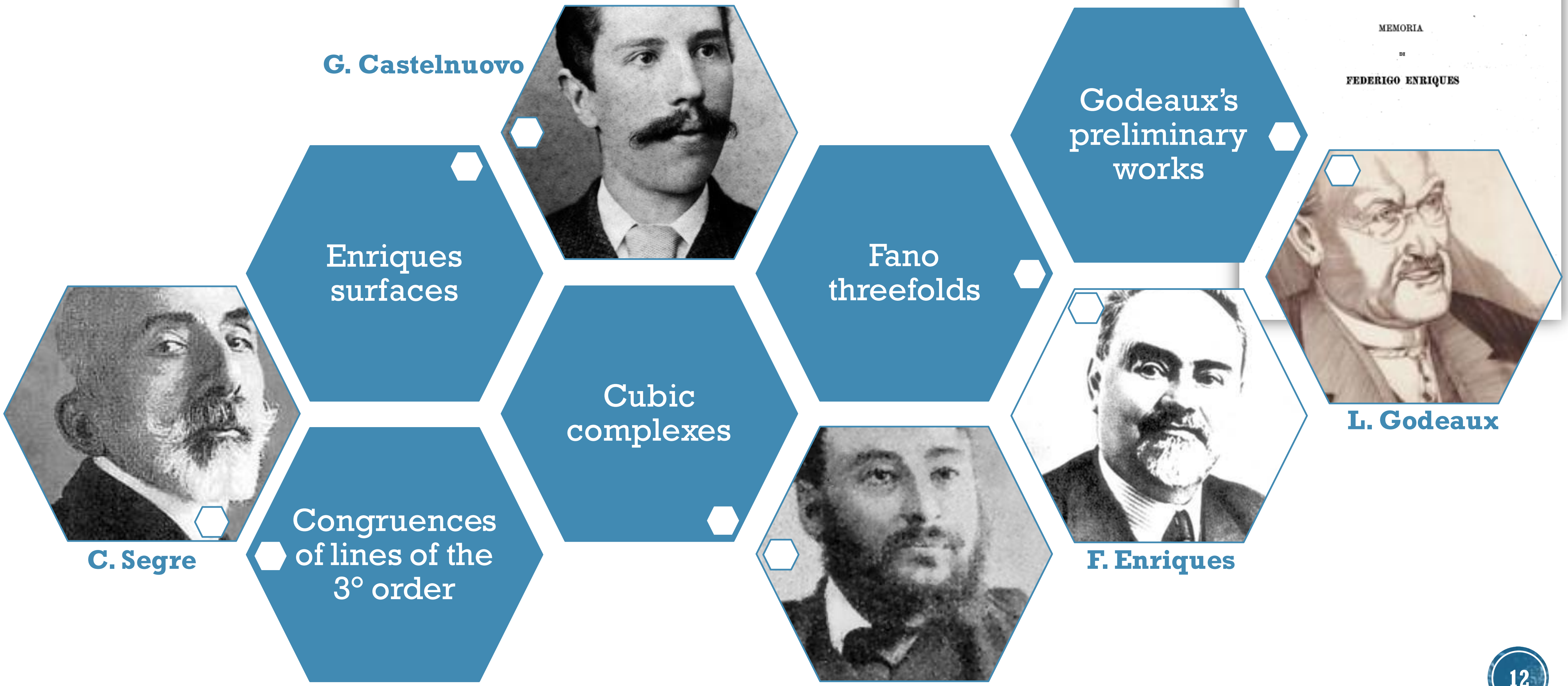
[…] *the **classification** of Enriques-Fano threefolds with arbitrary canonical singularities is **far from being complete**.* [Cheltsov 2004]

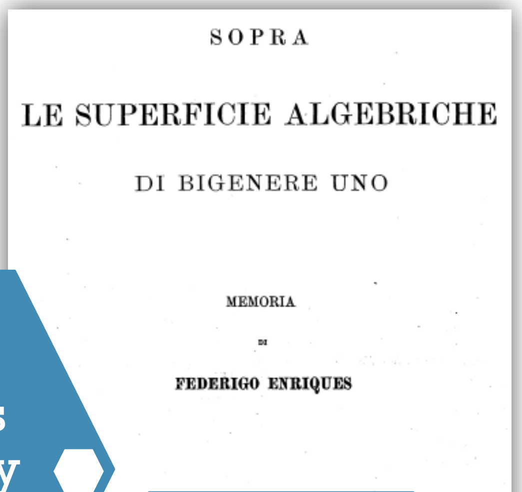
Thus to complete the classification one has to consider the case of non-terminal canonical singularities. [Prokhorov 2007]

[…] *in the singular case, a **classification**, or at least a search for the numerical invariants, **is still underway**.* [Knutsen, Lopez & Muñoz 2011]

CULTURAL ROOTS: ENRIQUES SURFACES

Fano and Godeaux (1933) **pioneers** in the study of Fano-Enriques threefolds.




SOPRA

LE SUPERFICIE ALGEBRICHE

DI BIGENERE UNO

MEMORIA

DI

FEDERIGO ENRIQUES

CULTURAL ROOTS: FANO VARIETIES

1. Strong interest in **K3 surfaces** certainly linked to the analysis of the linear systems of these surfaces over **Fano threefolds**

- **1937**: first steps toward the **classification**, based on the nature of **hyperplane sections**

2. Focus on the **automorphism groups** in algebraic geometry

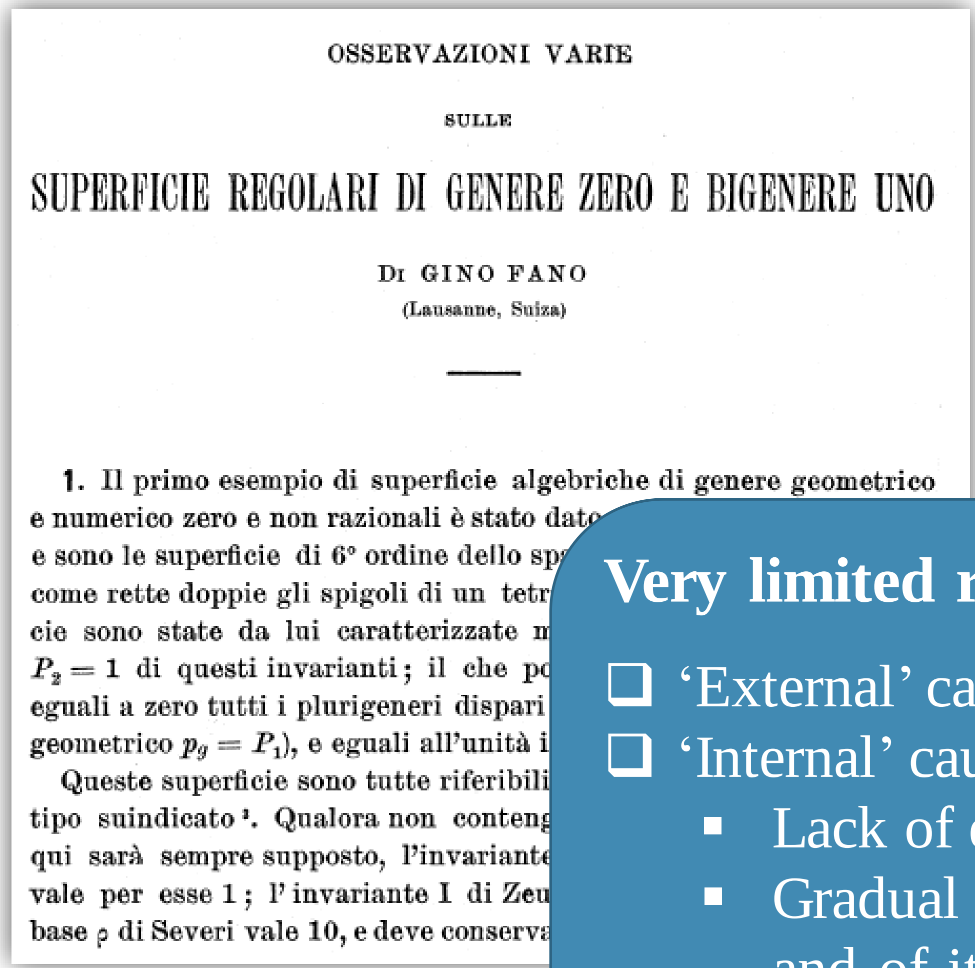
The general group of Enriques surfaces is not finite.

➡ Fano (1910): this **group** becomes **finite** for some special elements of the family of Enriques surfaces.

➡ I. **Doglachev** analized this example in a modern perspective.

When the root invariant of an Enriques surface becomes large, the automorphism group may become a finite group. ***The first example*** *of an Enriques surface with a finite automorphism group […]* ***belongs to G. Fano****. However,* ***I failed to understand Fano's proof****.* [Doglachev 2016, p. 28]

THE IMMEDIATE RECEPTION



OSSERVAZIONI VARIE

SULLE

SUPERFICIE REGOLARI DI GENERE ZERO E BIGENERE UNO

Di GINO FANO

(Lausanne, Suiza)

1. Il primo esempio di superficie algebriche di genere geometrico
e numerico zero e non razionali è stato dato
e sono le superficie di 6° ordine dello sp
come rette doppie gli spigoli di un tetr
cie sono state da lui caratterizzate m
$P_2 = 1$ di questi invarianti; il che po
eguali a zero tutti i plurigeneri dispari
geometrico $p_g = P_1$), e eguali all'unità i
Queste superficie sono tutte riferibili
tipo suindicato [1]. Qualora non conteng
qui sarà sempre supposto, l'invariante
vale per esse 1; l'invariante I di Zeu
base ρ di Severi vale 10, e deve conserva

[Fano 1944]

Later work on Fano-Enriques threefolds published in 1944 in the *Revista de Matemática y física teórica* of Tucumán

$V_3^{10} \subset \mathbb{P}^6$ whose hyperplane sections consist of 4 planes and 3 quadrics

Very limited reception

- ❑ 'External' causes (racial persecution, World War II, …)
- ❑ 'Internal' causes
  - Lack of effective mathematical tools
  - Gradual decline of the Italian School of algebraic geometry and of its methods, in favour of an algebraic (O. Zariski, A. Weil) and topological (S. Lefschetz) approach.

[Brigaglia 2001, Brigaglia-Ciliberto 2004]

CONCLUSIONS

Double **interest**

- **historical**
  - Testimony of cultural and political context
  - **'Style'** of the Italian School of algebraic geometry:

"[…] their unmistakable stress on their ***intuitive and geometrical capability*** *of overcoming technical difficulties."* [Brigaglia 2001, p. 202]

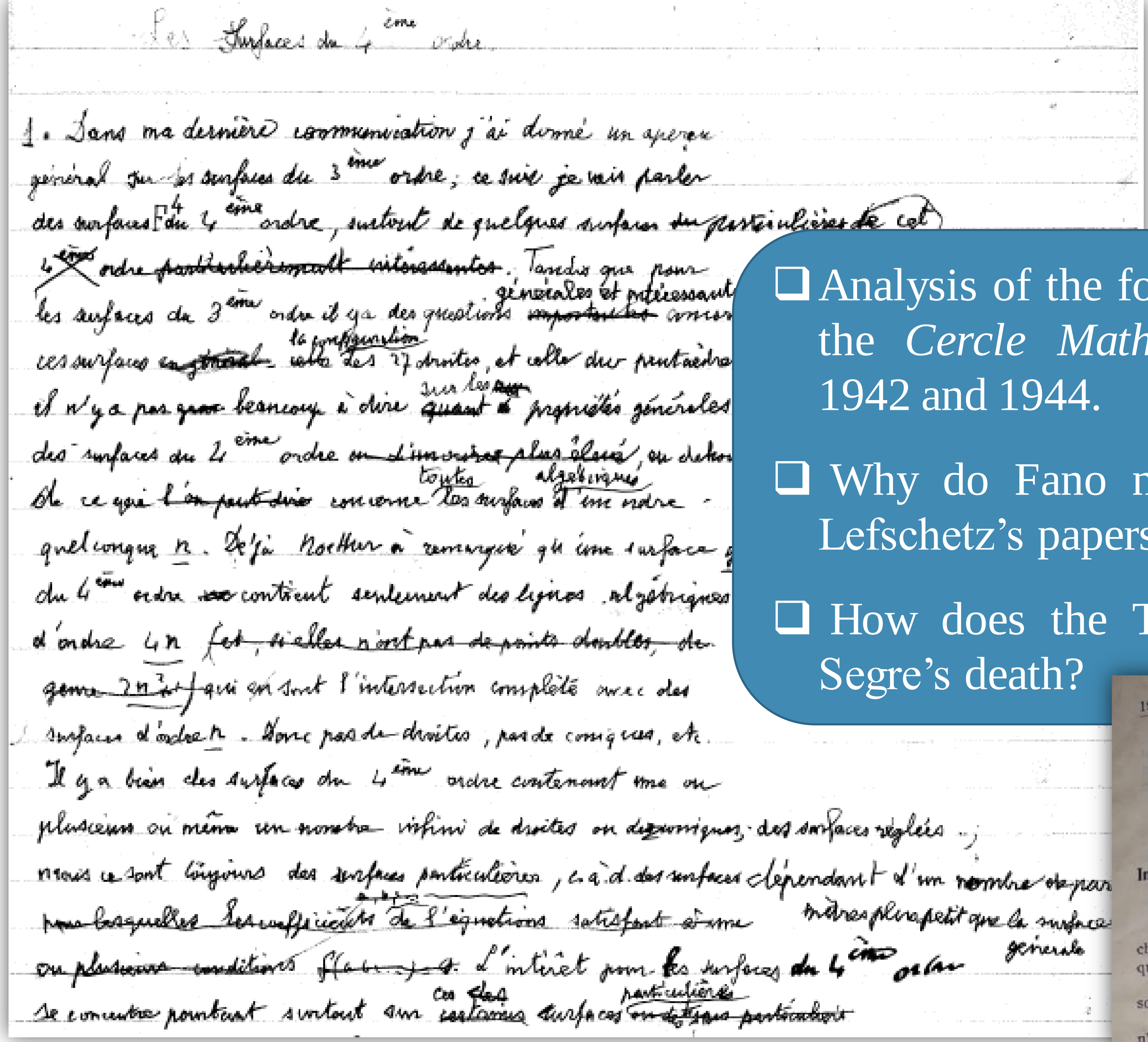
Tonelli, Fano, Fubini, Levi-Civita, Severi and consorts at the station of Warsaw in 1925

- **mathematical**
  - Fundamental and **innovative** contributions: *"[…] Fano's works on three-dimensional varieties constitute a set of great importance, which is certainly* ***at the basis of every subsequent research on this difficult topic.****"* [Terracini 1952, p. 489]
  - Major impacts on **modern mathematics:** *"This paper of Fano's is very interesting and full of geometry; by means of ingenious arguments and constructions Fano obtains* ***striking results****."* [Conte-Murre 1985, p. 43]

    [His work] *"****strongly influenced modern investigations****, which became* ***flourishing on this topic****."* [Collino-Conte-Verra 2014, p. 13]

FUTURE DEVELOPMENTS

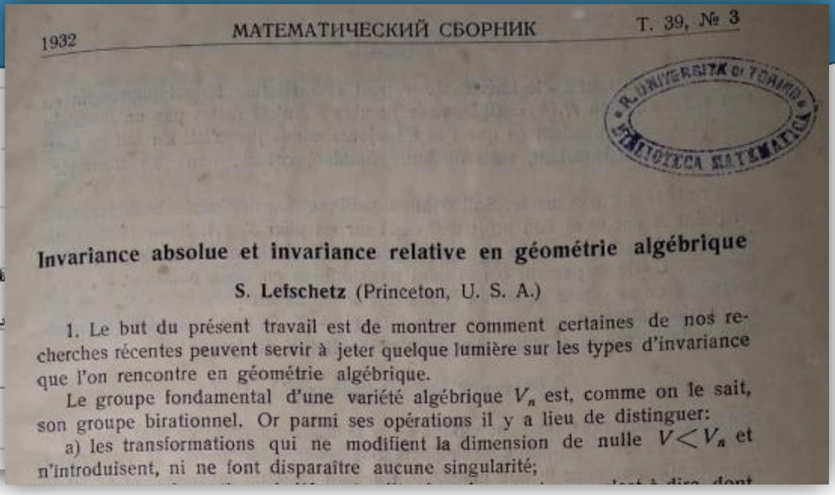
- ❑ Analysis of the four conferences that Fano holds at the *Cercle Mathématique* of Lausanne between 1942 and 1944.
- ❑ Why do Fano not benefit from his readings of Lefschetz's papers in the work of 1938?
- ❑ How does the Turinese *milieux* change after C. Segre's death?



Les surfaces du 4ème ordre

1. Dans ma dernière communication j'ai donné un aperçu général sur les surfaces du 3ème ordre; ce soir je vais parler des surfaces F^4 du 4ème ordre, surtout de quelques surfaces ~~du~~ particulières de cet 4ème ordre ~~particulièrement intéressantes~~. Tandis que pour les surfaces du 3ème ordre il y a des questions générales et intéressantes ~~importantes~~ concern[...] ces surfaces ~~en général~~ la configuration ~~celle~~ des 27 droites, et celle du pentaèdre [...] il n'y a pas ~~grand~~ beaucoup à dire sur les ~~quant à~~ propriétés générales des surfaces du 4ème ordre ~~ou d'un ordre plus élevé~~, ou d'autr[...] de ce qui ~~l'on peut dire~~ concerne toutes les surfaces algébriques d'un ordre quelconque n. Déjà Noether a remarqué qu'une surface g[...] du 4ème ordre ~~ne~~ contient seulement des lignes algébriques d'ordre 4n ~~fet, si elles n'ont pas de points doubles, de genre $2n^3+1$~~ qui en sont l'intersection complète avec des surfaces d'ordre n. Donc pas de droites, pas de coniques, etc.

Il y a bien des surfaces du 4ème ordre contenant une ou plusieurs ou même un nombre infini de droites ou de coniques, des surfaces réglées ..; mais ce sont toujours des surfaces particulières, c.à.d. des surfaces dépendant d'un nombre de paramètres plus petit que la surface générale ~~pour lesquelles les coefficients de l'équation satisfont à une ou plusieurs conditions~~. L'intérêt pour les surfaces du 4ème ordre se concentre pourtant surtout sur ces ~~des~~ ~~certaines~~ surfaces particulières



1932 МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК Т. 39, № 3

Invariance absolue et invariance relative en géométrie algébrique

S. Lefschetz (Princeton, U. S. A.)

1. Le but du présent travail est de montrer comment certaines de nos recherches récentes peuvent servir à jeter quelque lumière sur les types d'invariance que l'on rencontre en géométrie algébrique.

Le groupe fondamental d'une variété algébrique V_n est, comme on le sait, son groupe birationnel. Or parmi ses opérations il y a lieu de distinguer:

a) les transformations qui ne modifient la dimension de nulle $V < V_n$ et n'introduisent, ni ne font disparaître aucune singularité;

REFERENCES

BRIGAGLIA A. 2001, *The Creation and Persistence of National Schools: the Case of Italian Algebraic Geometry*, in BOTTAZZINI U. *et alii* (eds.) 2001, p. 187-206.

BRIGAGLIA A. – CILIBERTO C. 2004, *Remarks on the relations between the Italian and American schools of algebraic geometry in the first decades of the 20th century*, Historia Mathematica, 31, p. 310-319.

COLLINO A. – CONTE A. – VERRA A. 2014, *On the life and scientific work of Gino Fano*, La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'UMI, 7, n.1, p. 99-137.

CONTE A. – MURRE J.P. 1985, *Algebraic varieties of dimension three whose hyperplane sections are Enriques surfaces*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa Classe di Scienze, 12, p. 43-80.

FANO G. 1938, *Sulle varietà algebriche a tre dimensioni le cui sezioni iperpiane sono superficie di genere zero e bigenere uno*, Mem. Soc. It. d. Scienze, s.3, 24, p. 41-66.

FANO G. 1944, *Osservazioni varie sulle superficie regolari di genere zero e bigenere uno*, Revista de Matemática y física teórica, 4, p. 69-79

GIACARDI L. 1999, *Gino Fano*, in ROERO C.S. (ed.) La facoltà di Scienze MFN di Torino, p. 548-554.

GODEAUX L. 1933, *Sur les variétés algébriques à trois dimensions dont les sections hyperplanes sont des surfaces de genre zéro et de bigenre un*, Bull. de la Classe des sciences (Ac. royale de Belgique), 14, p. 134-140.

MURRE J.P. 1994, *On the work of Gino Fano on three-dimensional algebraic varieties*, in BRIGAGLIA A. *et alii* (eds.) Algebra e geometria (1860-1940): il contributo italiano, Suppl. ai Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, s.2, 26, p. 219-229.

TERRACINI A. 1952, *Gino Fano (1871-1952)*, Bollettino dell'UMI, s.3, 7, p. 485-490.